目录

CONTENTS

考情简介

一、考试形式及时间

考试采用闭卷笔试方式，考试时间为 60 分钟，全卷满分为 100 分。

二、考点及分值

题型	题量	每题分值	合计
选择题	10	3	30 分
填空题	5	4	20 分
计算题	4	10	40 分
应用题	1	10	10 分
合计			100 分

第一章 函数、极限与连续

考点 1 函数的定义域

母题精讲

【母题】函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\arcsin x+\sqrt{x}$ 的定义域是（　　）

A. $[0,1)$

B. $(0,1)$

C. $(-1,0)$

D. $(-1,0]$

【解析】解不等式组 $\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ -1\le x\le 1\\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\ -1\le x\le 1\\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le x<1$，故定义域为 $[0,1)$，选 A.

上岸锦囊

求函数的定义域，只需根据以下使得函数表达式有意义的几点规定：

（1）$\dfrac{1}{\square},\square\neq 0$；

（2）$\sqrt{\square},\square\ge 0$；

（3）$\log_a\square,\lg\square,\ln\square,\square>0$；

（4）$\arcsin\square,\arccos\square;-1\le\square\le 1$；

（5）$\tan\square,\square\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots\right)$；

（6）$\cot\square,\square\neq k\pi\left(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots\right)$

列不等式组，求解不等式组，用区间表示定义域即可.

真题链接

（2020 年第 1 题）函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为（　　）

A. $[-3,-1]\cup\{1\}$　　B. $(-3,-1]$

C. $[-3,-1)$　　D. $(-3,-1)$

（2021 年第 1 题）函数 $f(x)=\sin\sqrt{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域为（　　）

A. $[0,\ 1]$　　B. $[0,\ 1)$

C. $(0,\ 1]$　　D. $(0,\ 1)$

（2021 年第 1 题）函数 $y=\sqrt{1-e^{2x}}$ 的定义域为（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0]$

C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

习题精练

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是（　　）

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,0)\cup(0,1]$

C. $[0,+\infty)$　　D. $[-1,+\infty]$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-2,1)\cup(1,2]$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[-2,+\infty]$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$ 的定义域为（　　）

A. $(0,5]$　　B. $(1,5]$

C. $(1,5)$　　D. $(1,+\infty)$

4．函数 $y=\sqrt{x^2-3x-4}+\arccos\dfrac{x}{2}$ 的定义域为（　　）

A．$[-2,-1]$　　B．$[-2,-1]\cup[4,+\infty)$

C．$(2,4]$　　D．$(-\infty,-1]$

5．函数 $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\ln(x+3)}$ 的定义域是（　　）

A．$(-3,4)$　　B．$(-3,-2)\cup(-2,4]$

C．$[-4,4]$　　D．$(-3,1)\cup(1,4]$

6．函数 $f(x)=\dfrac{\sin(\ln x-1)}{\sqrt{4-x}}$ 的定义域为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,4]$

C．$(0,4)$　　D．$(0,2]$

7．函数 $y=\sqrt{\ln(x+1)}+\arcsin(x-1)$ 的定义域为（　　）

A．$(0,2)$　　B．$[0,2]$

C．$[0,2)$　　D．$(0,2]$

8．函数 $y=\arcsin(e^x-2)+\dfrac{1}{\ln x}$ 的定义域为（　　）

A．$(0,\ln 3]$　　B．$(0,1)$

C．$(1,\ln 3]$　　D．$(0,1)\cup(1,\ln 3]$

9．函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}-\ln(e^{\frac{x}{2}}-1)$ 的定义域为（　　）

A．$[-1,3]$　　B．$(0,3]$

C．$(-1,3]$　　D．$(0,+\infty)$

考点 2　函数的表达式

母题精讲

【母题 1】若函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$，$g(x)=1+x$，则 $f[g(-2)]=$（　　）

A．-2　　B．-1

C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

【解析】由题知 $g(-2)=-1$，故 $f[g(-2)]=f(-1)=\dfrac{2}{-1}=-2$，选 A.

【母题 2】设函数 $f(x-1)=x^2+5x+1$，则 $f(x)=$（　　）

A．x^2+7x+7　　B．x^2-7x+7

C．x^2-3x-3　　D．x^2-3x+3

【解析】令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，故 $f(t)=t^2+7t+7$，因此 $f(x)=x^2+7x+7$，选 A.

上岸锦囊

求函数的表达式，两种类型及方法

类型 1：已知 $f(x)$，$\varphi(x)$，求 $f(\varphi(x))$

方法：将 $f(x)$ 中的 x 替换成 $\varphi(x)$ 即可

类型 2：已知 $f(\varphi(x))$，求 $f(x)$

方法：换元，令 $\varphi(x)=t$，求出 $f(t)$，进而得 $f(x)$

真题链接

（2012 年第 1 题）设函数 $f(x)=\frac{1-x}{x},g(x)=1-x$, 则 $f(g(x))=$（ ）

A. $\frac{x}{1-x}$

B. $\frac{1}{x}$

C. $\frac{2x-1}{1-x}$

D. $2+x$

（2013 年第 1 题）设函数 $f(x-1)=x^2+x+1$，则 $f(x)=$（ ）

A. x^2-x+3

B. x^2+3x+3

C. x^2-3x+3

D. x^2-x-3

（2022 年第 1 题）已知函数 $f(x)=x^2+2x-3$，则 $f[f(1)]$ 的值为（ ）

A. 0

B. -1

C. -2

D. -3

习题精练

1. 设函数 $f\left(x\right)=\frac{3^x-1}{2-x}$，则 $f\left[f\left(0\right)\right]=$（ ）

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

2. 已知 $f\left(x\right)=e^{x-1}$，则 $f\left(f\left(1\right)\right)=$（ ）

A. 1

B. e

C. e^{-1}

D. e^2

3. 设 $f(x)=\frac{x-1}{x}$， $x\neq 0$且$x\neq 1$，则 $f(\frac{1}{f(x)})=$（ ）

A. $1-x$

B. $\frac{1}{1-x}$

C. $\frac{1}{x}$

D. x

4．设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$（　　）

A．$-\dfrac{x}{1-x^2}$　　　　B．$\dfrac{x}{1-x^2}$

C．$-\dfrac{x}{1+x^2}$　　　　D．$\dfrac{x}{1+x^2}$

5．已知 $f(3x-2)=x^2$，则 $f(x)=$______.

6．设函数 $f\left(e^x-2\right)=x^2+5x+1$，则 $f\left(x\right)=$（　　）

A．$\ln^2\left(x+2\right)+5\ln\left(x+2\right)+1$　　　　B．$\ln^2\left(x-2\right)+5\ln\left(x-2\right)+1$

C．$e^{2x}+5e^x-1$　　　　D．$e^{2(x+1)}+5e^{x+1}-1$

7．已知 $f\left(x^2+1\right)=x^4+x^2+1$，则 $f\left(x\right)=$（　　）

A．x^2-2x+1　　　　B．x^2+2x+1

C．x^2-x+1　　　　D．x^2+x+1

8．如果 $f(\dfrac{1}{x})=(\dfrac{x+5}{x})^5(x\neq 0)$，则 $f(x)=$______.

考点 3　极限的计算（利用第二个重要极限）

母题精讲

【母题】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+1}=$（　　）

A．1　　　　B．$e^{\frac{1}{2}}$

C．0　　　　D．e^3

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{2x-5})^{3x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x-5}\cdot(3x+1)}=e^{3}$，选 D.

上岸锦囊

利用“第二个重要极限”求极限：

1．一般形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

2．对一般形式进行推广：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$.

3．结论：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\varphi(x)\right)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot g(x)}$.

真题链接

（2019 年第 2 题）极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{2})^{\frac{3}{x}}=$（　　）

A．$e^{-\frac{3}{2}}$　　　　B．$e^{\frac{3}{2}}$

C．e^{-6}　　　　D．e^{6}

（2020 年第 3 题）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}=$（　　）

A．e^{-2}　　　　B．$e^{-\frac{1}{2}}$

C．$e^{\frac{1}{2}}$　　　　D．e^{2}

（2022 年第 2 题）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}=$（　　）

A. $e^{\frac{3}{2}}$　　B. $e^{\frac{2}{3}}$

C. e^{3}　　D. e^{6}

习题精练

1．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{x}=$（　　）

A. e^{2}　　B. e^{-2}

C. 1　　D. e^{4}

2．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+2}=$（　　）

A. $\frac{1}{\sqrt{e}}$　　B. $\sqrt{e}$

C. $\frac{1}{2}e$　　D. e^{-2}

3．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+2}=$（　　）

A. e^{-2}　　B. $2e$

C. $\sqrt{e}$　　D. e^{2}

4．极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{2-\frac{1}{x}}=$（　　）

A. 1　　B. 0

C. e^{-1}　　D. e

5．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{x+1}=$（　　）

A. e^{2}　　B. $e^{-\frac{1}{2}}$

C. $e^{\frac{1}{2}}$　　D. 1

6．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^{-\frac{x}{2}}=$（　　）

A．1　　　　B．e^{-1}

C．0　　　　D．$e^{\frac{1}{2}}$

7．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x+1}=$（　　）

A．1　　　　B．∞

C．e^{4}　　　　D．e

8．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5-3n}{1-3n}\right)^{n}=$（　　）

A．e　　　　B．$e^{-\frac{1}{3}}$

C．e^{-2}　　　　D．$e^{-\frac{4}{3}}$

考点 4　极限的计算

（利用等价无穷小替换，无穷小量的性质）

母题精讲

【母题】下列各式中，正确的是（　　）

A．$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$　　　　B．$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=2$

C．$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2022x}{x}=0$　　　　D．$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 5x}=\frac{1}{5}$

【解析】A：无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量；

B：利用等价无穷小替换得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2$ ；

C：利用等价无穷小替换得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2022x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2022x}{x}=2022$；

D：利用等价无穷小替换得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5x}=\dfrac{1}{5}$，选 D.

上岸锦囊

1. 利用无穷小量的性质求极限：无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.

2. 利用等价无穷小量替换求极限：

常用的几组等价无穷小量

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\arcsin x\sim x$， $\arctan x\sim x$, $\ln\left(1+x\right)\sim x$，

$e^x-1\sim x$，

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$， $\sqrt[m]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{m}x$， $a^x-1\sim x\ln a$

注 1：几组等价无穷小量的推广，

如：$x\to 0,\sin x\sim x$，推广为：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)=0$，则 $x\to x_0$ 时，$\sin\varphi\left(x\right)\sim\varphi\left(x\right)$.

注 2：能够等价无穷小替换的条件为乘除一定可换，和差不一定能换.

真题链接

（2019 年第 2 题）下列说法正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

B. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$

（2020 年第 2 题）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{x^2}=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{8}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

（2021 年第 2 题）下列等式正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{3x^2-x-1}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$　　D. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$

习题精练

1. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{2}{x}-\dfrac{\sin2x}{x}\right)=$（　　）

A. 0　　B. −2

C. 2　　D. 1

2. 下列各式正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2+x}{x}}=e^2$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=e^2$　　D. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{2017}{x}=2017$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=$_______.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{1-e^{\sqrt{x}}}=$ _______.

5. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{2x}{x^2+1}=$_______.

6．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln\left(1+x^2\right)}{e^{x^2}-1}=$（　　）

A．1　　B．-2

C．2　　D．-1

7．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)\sin x}{\arcsin 2x}=$_______.

8．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=$_______.

考点 5　已知分段函数在分段点的连续性求参数

母题精讲

【母题 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ 在 $(-1,1)$ 内连续，则 $k=$（　　）

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$

C．1　　D．2

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$ 且 $f(0)=k$，由函数在点 $x=0$ 处的连续性得 $k=1$，选 C.

【母题 2】设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{1-\cos\sqrt{x}}+2^x & x>0\\ x^2+k & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$（　　）

A．-3　　B．3

C．2　　D．-2

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{1-\cos\sqrt{x}}+2^x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2}+1=3$，

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+k)=k$ 且 $f(0)=k$，由函数在点 $x=0$ 处的连续性得 $k=3$，选 B.

上岸锦囊

已知分段函数在分段点处的连续性反求参数的方法：利用函数连续的定义

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

真题链接

（2020 年第 3 题）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2019}{x}\sin x+x\sin\dfrac{2020}{x}, & x<0\\ a-1, & x=0\\ (1-x)^{\frac{b}{x}}, & x>0\end{cases}$ 在点 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a+b=$（　　）

A. $2021+\ln2020$　　B. $2021-\ln2020$

C. $2020+\ln2019$　　D. $2020-\ln2019$

（2022 年第 2 题）设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{2}{x}}, & x>0\\ x^2+a, & x\le0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）

A. e^{-2}　　B. e^{-1}

C. e^{2}　　D. 1

（2022 年第 3 题）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{ax}, & x>0,\\ x+2, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 的值为（　　）

A．-1　　　　B．1

C．2　　　　D．$\dfrac{1}{2}$

习题精练

1．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{x(e^x-1)} & x\ne 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$（　　）

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-2x^2)}{1-\cos x}, & x\ne 0\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $k=$（　　）

A．0　　　　B．1

C．-4　　　　D．-2

3．已知 $f(x)=\begin{cases}a+x\sin\dfrac{1}{2x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{e^{2x}-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$（　　）

A．-1　　　　B．0

C．1　　　　D．2

4．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x} & -1\leqslant x<0\\ x+a & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）

A．0　　　　B．-1

C．1

D．$\frac{1}{2}$

5．函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} a+\sin 2x, & x\le 0 \\ \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$

B．1

C．0

D．2

6．若函数 $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x\le 0 \\ \ln(1-ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$（　　）

A．$-e$

B．2

C．e

D．-2

7．已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+a, & x<0 \\ e^x+1, & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$（　　）

A．1

B．-1

C．2

D．$\frac{1}{2}$

8．设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\left(1+x\right)}{1-\cos\sqrt{x}}+2^x & 0<x<1 \\ x^2+k & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$（　　）

A．-3

B．2

C．3

D．-2

考点 6　间断点的分类

母题精讲

【母题】对于函数 $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$，以下结论正确的是（　　）

A．$x=3$ 是第一类间断点，$x=-1$ 是第一类间断点

B．$x=3$ 是第一类间断点，$x=-1$ 是第二类间断点

C．$x=3$ 是第二类间断点，$x=-1$ 是第一类间断点

D．$x=3$ 是第二类间断点，$x=-1$ 是第二类间断点

【解析】由题意，无定义的点为 $x=3,x=-1$，

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{3}{2}$，左、右极限都存在且相等，故 $x=3$ 是第一类间断点；

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+3}{x+1}=\infty$，左、右极限都不存在，故 $x=-1$ 是第二类间断点，故选 B.

上岸锦囊

间断点的分类的方法：

对间断点处求极限，根据间断点处的极限值下结论，分类：

（1）第一类间断点：左、右极限都存在的间断点

细分：可去间断点：左、右极限存在且相等的间断点

　　　跳跃间断点：左、右极限存在但不相等的间断点

（2）第二类间断点：除第一类间断点之外的间断点

真题链接

（2015 年第 3 题）设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A．可去间断点　　B．跳跃间断点

C．第二类间断点　　D．连续点

（2017 年第 3 题）函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}$ 的第二类间断点为（　　）

A．$x=-4$　　B．$x=4$

C．$x=2$　　D．$x=-2$

习题精练

1．对于函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$，以下结论正确的是（　　）

A．$x=1$ 是第一类间断点，$x=-3$ 是第一类间断点

B．$x=1$ 是第二类间断点，$x=-3$ 是第一类间断点

C．$x=1$ 是第一类间断点，$x=-3$ 是第二类间断点

D．$x=1$ 是第二类间断点，$x=-3$ 是第二类间断点

2．对于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$，以下结论中正确的是（　　）

A．$x=4$ 是第一类间断点，$x=-5$ 是第一类间断点

B．$x=4$ 是第一类间断点，$x=-5$ 是第二类间断点

C．$x=4$ 是第二类间断点，$x=-5$ 是第一类间断点

D．$x=4$ 是第二类间断点，$x=-5$ 是第二类间断点

3．对于函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$，以下结论正确的是（　　）

A．$x=1$ 是第一类间断点，$x=-4$ 是第一类间断点

B．$x=1$ 是第二类间断点，$x=-4$ 是第二类间断点

C．$x=1$ 是第二类间断点，$x=-4$ 是第一类间断点

D．$x=1$ 是第一类间断点，$x=-4$ 是第二类间断点

4．设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}},x>0\\ 1,\quad x=0\\ \dfrac{\sin 2x}{x},x<0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A．跳跃间断点　　B．可去间断点

C．无穷间断点　　D．连续点

5．点 $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}},x<0\\ 0,\quad x=0\\ x\sin\dfrac{2}{x},x>0\end{cases}$ 的（　　）

A．跳跃间断点　　B．可去间断点

C．第二类间断点　　D．连续点

6．设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 则（　　）

A．$x=0,x=1$ 都是第一类间断点

B．$x=0,x=1$ 都是第二类间断点

C．$x=0$ 是第一类间断点，$x=1$ 是第二类间断点

D．$x=0$ 是第二类间断点，$x=1$ 是第一类间断点

7．$x=1$ 是 $y=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{2^{\frac{1}{x-1}}+1}$ 的（　　）

A．连续点　　B．跳跃间断点

C．可去间断点　　D．第二类间断点

8．点 $x=1$ 是函数 $f\left(x\right)=2^{\frac{x}{x-1}}$ 的（　　）

A．连续点　　B．跳跃间断点

C．可去间断点　　D．第二类间断点

第二章　一元函数微分学

考点 1　导数的定义式

母题精讲

【母题 1】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-3h)}{h}=$（　　）

A．-1　　B．1

C．5　　D．2

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-3h)}{h}=\dfrac{2-(-3)}{1}f'(0)=5f'(0)=5$，选 C.

【母题 2】设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=12$，则 $f'(x_0)=$（　　）

A．3　　B．2

C．1　　D．4

【解析】由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=\dfrac{2-(-1)}{1}f'(x_0)=3f'(x_0)=12$，得 $f'(x_0)=4$，故选 D.

上岸锦囊

凑导数的定义式：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ 或 } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

结论：若 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{c\Delta x}=\dfrac{a-b}{c}f'(x_0)$

真题链接

（2016 年第 2 题）设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，且 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=$（　　）

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．5

（2019 年第 3 题）设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=3$，则 $f'(x_0)=$（　　）

A．-1　　　　B．0

C．1　　　　D．3

（2020 年第 2 题）设 $f'(x_0)$ 存在，则下列 4 个极限中等于 $f'(x_0)$ 的是（　　）

A．$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(x_0-\dfrac{1}{n})-f(x_0)\right]$　　　　B．$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

C．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$　　　　D．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{\Delta x}$

习题精练

1．设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0-2t)}{t}=$（　　）

A．-1　　　　B．-3

C．1　　　　D．3

2．设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(1-h)-f(1+h)\right]=$（　　）

A．-2　　　　B．2

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

3．已知 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-2x)}{\tan x}=$（　　）

A. 6

B. 2

C. 4

D. 1

4．已知 $f'(0)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\left[f(x)-f\left(\frac{x}{3}\right)\right]=$（　　）

A. 2

B. 4

C. 1

D. 3

5．设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则 $f'(1)=$（　　）

A. 2

B. -2

C. 1

D. -1

6．设 $f(x)$ 在 m 处可导，若 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(m+2021h)-f(m-h)}{2h}=-2022$，则 $f'(m)=$（　　）

A. -1

B. 2

C. 1

D. -2

7．设 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(5)-f(x)}{x-5}=-\frac{1}{2}$，则 $f'(5)=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. 1

D. 3

8．设 $f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则 $f'(0)=$（　　）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 不存在

考点 2　一元显函数高阶导数的计算

母题精讲

【母题】已知 $y=\dfrac{1}{x+1}$，则 $y^{(10)}=$（　　）

A. $\dfrac{10!}{(1+x)^{11}}$　　B. $-\dfrac{10!}{(1+x)^{11}}$

C. $\dfrac{10!}{(1+x)^{10}}$　　D. $-\dfrac{10!}{(1+x)^{10}}$

【解析】

$y'=-1\cdot(x+1)^{-2}$，$y''=-1\cdot(-2)\cdot(x+1)^{-3}$，$y'''=-1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(x+1)^{-4}$，……，

$y^{(n)}=-1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot......(-n)(x+1)^{-(n+1)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$，故

$y^{(10)}=\dfrac{(-1)^{10}10!}{(x+1)^{11}}=\dfrac{10!}{(x+1)^{11}}$，选 A.

上岸锦囊

一元显函数 $y=f(x)$ 的求导方法：

利用基本导数公式表、导数的四则运算法则及复合函数求导的链式法则进行求导，其中高阶导数需要一阶一阶进行求导找规律.

真题链接

（2018 年第 4 题）设 $y=x^n+e^x$，则 $y^{(n)}=$（　　）

A. $n!+e^x$　　B. $n!+ne^x$

C. $n!$　　D. e^x

（2019 年第 4 题）设 $f(x)=\ln(1+x^2)$，则 $f''(0)=$（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

（2021 年第 3 题）设 $f(x)=x\sin 2x$，则 $f''(0)=$（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

习题精练

1．设函数 $f(x)=x\arctan x$，则 $f''(1)=$（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

2．设函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $f''(0)=$（　　）

A. 0　　B. 3

C. -2　　D. 2

3．设函数 $f(x)=\sin 2x+\sin^2 x$，则 $f''(x)=$（　　）

A. $\cos 2x+\sin 2x$　　B. $-4\sin 2x+2\cos 2x$

C. $2\cos 2x+\sin 2x$　　D. $-2\sin 2x+2\cos 2x$

4．设函数 $f(x)=x^{2020}+6x^{2019}+5x^{2018}+4x^3+2x+1$，则 $f^{(2019)}(1)=$（　　）

A. $2026\cdot 2019!$　　B. $7\cdot 2019!$

C. $2021\cdot 2019!$　　D. $1016\cdot 2019!$

5．设函数 $y=x^2\ln x$，则 $y^{(10)}=$（　　）

A. $\dfrac{2\cdot 6!}{x^7}$　　B. $\dfrac{-2\cdot 7!}{x^8}$

C. $\dfrac{2\cdot 8!}{x^9}$　　D. 0

6. 设函数 $f(x)=3x^{10}+2x-1$，则 $f^{(9)}(1)=$（　　）

A. $3\cdot 9!$　　B. $3\cdot 10!$

C. 0　　D. $10!$

7. 设函数 $f(x)=3x^2+\sin x$，则 $f^{(10)}(x)=$（　　）

A. $-\sin x$　　B. $-\cos x$

C. $\cos x$　　D. $\sin x$

8. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $f^{(5)}(1)=$（　　）

A. 24　　B. -24

C. 96　　D. -96

考点 3　一元隐函数导数的计算

母题精讲

【母题 1】已知函数 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{xy}-y+\sin y=0$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　　）

A. $\dfrac{xe^{xy}-1+\cos y}{ye^{xy}}$　　B. $\dfrac{1-xe^{xy}-\cos y}{ye^{xy}}$

C. $\dfrac{ye^{xy}}{xe^{xy}-1+\cos y}$　　D. $\dfrac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}-\cos y}$

【解析】令 $F(x,y)=e^{xy}-y+\sin y$，