1 指　数

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

（2）$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

（3）$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

（4）$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

（5）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

（6）$a^0 = 1$

（7）$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

（8）$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

2 对 数（$a>0$，$a\neq1$）

（1）若 $a^y=x$，则 $y=\log_a x$

（2）$\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，$\ln e=1$，$\ln 1=0$

（3）$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$

（4）$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

（5）$\log_a x^b=b\log_a x$

（6）$a^{\log_a x}=x$，$e^{\ln x}=x$

（7）$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

3 常用三角公式

（1） $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

（2） $1+\tan^2 x=\sec^2 x$

（3） $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

（4） $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ； $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ ； $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

（5） $\sin 2x=2\sin x\cos x$

（6） $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

（7） $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$

（8） $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

（9） $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$

（10） $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

（11） $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

（12） $\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$

（13） $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$

（14） $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

4 常用三角函数值

角	弧度	正弦（sin）	余弦（cos）	正切（tan）	余切（cot）
0	0	0	1	0	不存在
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	不存在	0
180°	π	0	-1	0	不存在

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

5 常用二项式展开及因式分解公式

（1） $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

（2） $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

（3） $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

（4） $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

（5） $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

（6） $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

（7） $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

（8） $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

6 绝对值

（1）$|a|=|-a|$

（2）$-|a|\le a\le |a|$

（3）$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

（4）$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

（5）$|a|\le b\Leftrightarrow -b\le a\le b$

（6）$|a|\ge b\Leftrightarrow a\le -b$ 或 $a\ge b$

（7）$\sqrt{a^2}=|a|$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

7 函数自变量取值范围

（1） $\frac{1}{\square},\square\neq 0$；（如： $y=\frac{1}{x^2-1}$）

（2） $\sqrt{\square},\square\geq 0$；（如： $y=\sqrt{x+1},y=\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$）

（3）$\log_a\square,\lg\square,\ln\square,\square>0$；（如：$y=\log_2(2x+1),y=\frac{1}{\ln x}$）

（4） $\arcsin\square,\arccos\square;-1\leq\square\leq 1$；（如： $y=\arcsin 3x$, $y=\arccos(x+2)$）

（5） $\tan\square,\square\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$；

（6） $\cot\square,\square\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

8 极限存在的充要条件

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

9 常见考虑分方向的极限

（1）分段函数分段点处的极限

如：$f(x)=\begin{cases}2x-1,x>0\\3x,x\le 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（2）因为 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$；$0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0,\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\infty$ 两个方向的结果不一样，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=\infty$ 时，求 $\lim\limits_{x\to x_0}a^{\phi(x)}$ 需要分方向求极限，再根据极限存在的充要条件判定

（3）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ 两个方向的结果不一样，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=\infty$时，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan\phi(x)$ 需要分方向求极限，再根据极限存在的充要条件判定.

10 常用等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$　　　　$e^x - 1 \sim x$

$\tan x \sim x$　　　　$a^x - 1 \sim x \ln a$

$\arcsin x \sim x$　　　　$\ln(1+x) \sim x$

$\arctan x \sim x$　　　　$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$　　　　$\sqrt[m]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{m}x$

11 间断点分类

第一类间断点

左右极限都存在的间断点

- 可去间断点：左右极限相等的间断点
- 跳跃间断点：左右极限不相等的间断点

第二类间断点：除第一类之外的间断点

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

12 导数基本公式

（1）$(C)'=0$

（2）$(x^n)'=nx^{n-1}$

（3）$(a^x)'=a^x\ln a$

（4）$(e^x)'=e^x$

（5）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

（6）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

（7）$(\sin x)'=\cos x$

（8）$(\cos x)'=-\sin x$

（9）$(\tan x)'=\sec^2 x$

（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$

（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

（16）$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

13 导数的四则运算

（1）$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

（2）$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

（3）$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2} \left(g(x) \neq 0\right)$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

14 单调区间

（1）求函数 $f(x)$ 的单增区间：令 $\begin{cases} x \in D \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}$

（2）求函数 $f(x)$ 的单减区间：令 $\begin{cases} x \in D \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

15 求极值步骤

第一种：

（1）求出函数 $f(x)$ 在所讨论区间内的所有驻点与不可导点；

（2）用驻点与不可导点将定义域分为几个区间，判定各区间内一阶导数的正负，若驻点与不可导点左右两侧一阶导数异号，则它们是极值点，结合单调性判定是极大值点还是极小值点；

（3）求出 $f(x)$ 的极值.

第二种：

（1）求出 $f'(x)$ 与 $f''(x)$，并求出 $f(x)$ 在所考虑区间内的所有驻点；

（2）考察 $f''(x)$ 在各驻点处的符号，判定它们是否为极值点，是何种极值点；

（3）求出 $f(x)$ 的极值.

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

16 极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有二阶连续偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$.

令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，

则：

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 是极值点，且当 $A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是极大值，当 $A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是极小值；

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是极值点，从而 $f(x_0,y_0)$ 不是极值；

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另作判定。

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

17 基本积分公式

（1）$\int a dx = ax + c$

（2）$\int x^u dx = \frac{1}{u+1} x^{u+1} + c \qquad (u \neq -1)$

（3）$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

（4）$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

（5）$\int e^x dx = e^x + c$

（6）$\int \sin x dx = -\cos x + c$

（7）$\int \cos x dx = \sin x + c$

（8）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

（9）$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

（10）$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

（11）$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

（12） $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

（13） $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

（14） $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + c$

（15） $\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + c$

（16） $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

（17） $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

（18） $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

（19） $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$

（20） $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

（21） $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

18 常见的凑微分

若 $\int f(x)dx = F(x)+c$ ，则

（1） $\int x^{\alpha-1}f(x^{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha}\int \alpha x^{\alpha-1}f(x^{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha}\int f(x^{\alpha})dx^{\alpha}$

$= \frac{1}{\alpha}F(x^{\alpha})+c$

（2） $\int \frac{1}{x}f(\ln x)dx = \int f(\ln x)d\ln x = F(\ln x)+c$

（3） $\int \sin x f(\cos x)dx$

$= -\int (-\sin x)f(\cos x)dx$

$= -\int f(\cos x)d\cos x$

$= -F(\cos x)+c$

（4） $\int \cos x f(\sin x)dx = \int f(\sin x)d\sin x = F(\sin x)+c$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

（5）$\int \frac{1}{1+x^2} f(\arctan x)dx = \int f(\arctan x)d\arctan x$

$= F(\arctan x) + c$

（6）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f\left(\arcsin x\right)dx = \int f\left(\arcsin x\right)d\arcsin x$

$= F\left(\arcsin x\right) + c$

（7）$\int e^x f(e^x)dx = \int f(e^x)de^x = F(e^x) + c$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

19 三 角 换 元

类型一：

出现 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$（依据为：$1-\sin^2 x=\cos^2 x$）

类型二：

出现 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$（依据为：$1+\tan^2 x=\sec^2 x$）

类型三：

出现 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$（依据为：$\sec^2 x-1=\tan^2 x$）

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

20 分部积分公式

（1）不定积分的分部积分公式：

$$\int udv = uv - \int vdu \ = uv - \int vu'dx \ .$$

主要解决被积函数由两种不同类型函数乘积构成，且不能凑微分的积分问题.

选择 u 的优先次序：反、对、幂、三、指

（2）定积分的分部积分公式：

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu \ .$$

定积分的分部积分法与不定积分的分部积分完全类似

21 变限函数求导公式

（1）变上限函数求导

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{\phi(x)} f(t)dt = f(\phi(x))\phi'(x)$$

（2）变下限函数求导

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{a} f(t)dt = -f(\phi(x))\phi'(x)$$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

22 全微分公式

（1） $z=f\left(x,y\right)$ 的全微分记为 dz，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

（2） $u=f\left(x,y,z\right)$ 的全微分记为 du，

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

23 隐函数微分法

（1）(1个函数1个自变量）设函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内唯一确定了一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=y(x)$，它满足

$y_0=y(x_0)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}\ .$$

（2）（1个函数2个自变量） 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $F(M_0)=0$，$F'_z(M_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 M_0 的某一邻域内唯一确定了一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，它满足 $z_0=z(x_0,y_0)$，并且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

24 常见级数的敛散性

（1）等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$，公比 q

当 $|q|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ 收敛；当 $|q|\geq 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ 发散

（2）$P-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛；当 $p\leq 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

25 正项级数的比值判别法

设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ （$0\le\rho\le\infty$），

则所给级数：

（1）当 $\rho<1$ 时收敛；

（2）当 $\rho>1$ 时发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，用其它方法加以判定。

一般，若正项级数的通项中出现了指数，阶乘，幂指的形式，则应该选择比值判别法来判定敛散性。

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

26 莱布尼茨定理

若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\left(u_n>0\right)$ 同时满足：

（1） $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

（2） $u_n \geq u_{n+1}$；

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\left(u_n>0\right)$ 收敛，否则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\left(u_n>0\right)$ 发散

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

27 常用幂级数展开公式

（1）$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，　$x\in R$

（2）$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，　$-1<x<1$

（3）$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，　$-1<x<1$

（4）$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

28 一阶线性微分方程

（1）标准形式： $y'+P(x)y=Q(x)$

当 $Q(x)\neq 0$ 时，称该方程为非齐次线性方程，

当 $Q\left(x\right)=0$ 时，称得到的方程 $y'+P(x)y=0$ 为齐次线性方程

（2）一阶非齐次线性微分方程通解公式：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$$

（3）一阶齐次线性微分方程通解公式：

$$y=ce^{-\int p(x)dx}$$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

29 克莱姆法则

系数行列式 D

（1）n 元齐次线性方程组

$D \neq 0 \Leftrightarrow$ 仅有零解； $D = 0 \Leftrightarrow$ 有非零解

（2）n 元非齐次线性方程组

$D \neq 0 \Leftrightarrow$ 唯一解； $D = 0$ 则无解或无穷多解

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

30 矩阵的转置

假设所有运算有意义：

（1）$(A^T)^T = A$；

（2）$(A+B)^T = A^T + B^T$；

（3）$(\lambda A)^T = \lambda A^T$（$\lambda$ 是数）；

（4）$(AB)^T = B^T A^T$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

31 方阵行列式

设 A，B 是 n 阶方阵，λ 是数，则

（1）$\left|A^T\right| = |A|$；

（2）$|\lambda A| = \lambda^n |A|$；

（3）$|AB| = |A||B|$

佳鑫诺升本在线 JIAXINNUO UPGRADE ONLINE

32 逆矩阵的性质

（1）若 A 可逆，则 A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$；

（2）若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

（3）若 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}=\frac{1}{|A|}$；$\left|A^{*}\right|=\left|A\right|^{n-1}$

（4）若 A 可逆，则 $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$；

（5）若同阶方阵 A,B 可逆，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

佳鑫诺升本在线
JIAXINNUO UPGRADE ONLINE